

Il cerchio dei nove punti in problemi sui luoghi

**Ercole Suppa,
Italo D'Ignazio**

Riassunto

Il cerchio dei nove punti è una figura geometrica ricca di proprietà che si prestano ad essere illustrate mediante CABRI e che si possono dimostrare, per la massima parte, con mezzi elementari. CABRI aiuta nella formulazione di ipotesi o congetture e indirizza nella ricerca della dimostrazione. In questo articolo, dopo una breve introduzione sulle principali proprietà del cerchio dei nove punti e della retta di Simson-Wallace, vengono trattati alcuni problemi di *ricerca di luoghi piani* che conducono al cerchio dei nove punti.

Ercole Suppa

L. S. S. "A. Einstein", Teramo
ercsuppa@tin.it

Italo D'Ignazio

Ex-Presidente della sez. Mathesis di Teramo
idignaz@tin.it

Proceedings of the Third Cabri Geometry International Conference

(G. Accascina, G. Margiotta eds.), 2012, Nuova Cultura, Roma, pp. 971-990, DOI: 10.4458/7762-68

Notazioni: Le notazioni usate sono quelle classiche, vale a dire: A, B, C sono i vertici di un triangolo, M_a, M_b, M_c i punti medi dei lati, H_a, H_b, H_c i piedi delle altezze, E_a, E_b, E_c i punti di Eulero (cioè i punti medi dei segmenti che vanno dall'ortocentro ai vertici), H è l'ortocentro, O il circocentro, (O) il circoncerchio, R il circonraggio.

IL CERCHIO DEI NOVE PUNTI

Nel 1765 Eulero scoprì che il triangolo mediale e il triangolo ortico hanno lo stesso circoncerchio. Qualche anno dopo i geometri francesi Poncelet e Brianchon dimostrarono che questo passa per altri tre punti notevoli del triangolo e precisamente per i punti medi dei segmenti che uniscono l'ortocentro H con i vertici (detti *punti di Eulero*). Se O, H, R indicano, come di consueto, il circocentro, l'ortocentro e il circonraggio, tali proprietà sono espresse nel seguente:

Teorema 1

Dato un triangolo ABC , il cerchio γ avente centro nel punto medio N di OH e raggio $R/2$ passa per i punti medi dei lati, per i piedi delle altezze e per i punti di Eulero.

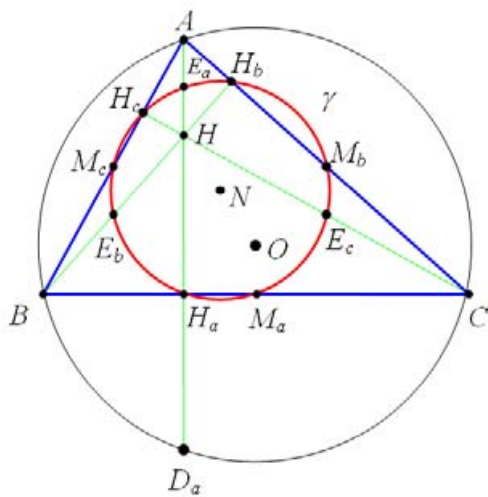


Fig. 1

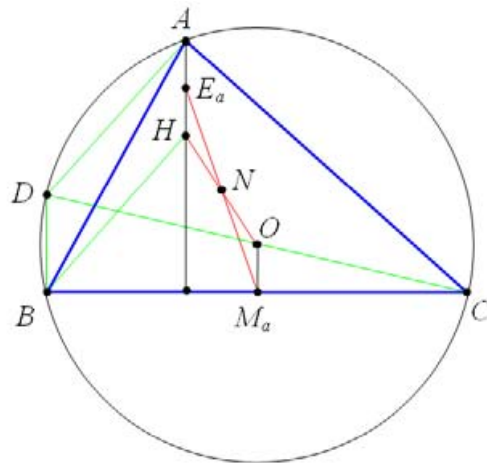


Fig. 2

Una verifica *visiva* del teorema può farsi immediatamente mediante CABRI: basta usare la macro *'circonferenza circoscritta'* e tracciare con essa il cerchio passante per i punti medi; poi, mediante il comando *'appartiene a ... ?'*, si può constata-

re che il cerchio tracciato passa anche per i piedi delle altezze e per i punti di Eulero (Fig. 1). Tali proprietà restano vere anche variando le posizioni dei vertici A, B, C .

Nel seguito, quando enunceremo una proprietà, ne indicheremo sempre, brevemente, una possibile verifica grafica con CABRI prima di darne una dimostrazione razionale (è nostra convinzione che questo modo di procedere abbia un alto valore didattico).

Una dimostrazione razionale può essere la seguente:

indichiamo con E_i, D_i ($i = a, b, c$) i punti di Eulero e le intersezioni del circoncerchio (O) con i prolungamenti delle altezze. Detto D il punto di (O) diametralmente opposto a C , poiché $ADBH$ è un parallelogrammo, abbiamo (Fig. 2):

$$OM_a = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AH = E_aH \Rightarrow HN = NO$$

Gli angoli $B\hat{D}_aA$ e $B\hat{C}A$ sono uguali in quanto insistono sullo stesso arco AB ; gli angoli $A\hat{H}H_b$ e $B\hat{C}A$ sono uguali in quanto complementari dello stesso angolo $H\hat{A}C$. Pertanto:

$$B\hat{D}_aH = B\hat{D}_aA = B\hat{C}A = A\hat{H}H_b = B\hat{H}D_a \Rightarrow H_aH = H_aD_a$$

L'omotetia ω di centro H e rapporto $1/2$ trasforma O in N ed il circoncerchio nel cerchio γ di centro N e raggio $R/2$. Inoltre ω manda i vertici nei punti di Eulero e D_i in H_i , per cui anche E_i e H_i appartengono a γ . Il quadrilatero E_aHM_aO è un parallelogrammo (Fig. 2), quindi le sue diagonali E_aM_a ed HO si intersecano nel punto medio N e risulta:

$$NM_a = NE_a = \frac{1}{2}R \Rightarrow M_a \in \gamma$$

Analogamente si prova che $M_b, M_c \in \gamma$. □

Il circoncerchio del triangolo mediale ed il suo centro N sono chiamati rispettivamente *cerchio dei nove punti* (o *cerchio di Eulero*) e *centro dei nove punti* del triangolo ABC . Il cerchio dei nove punti è anche chiamato *cerchio di Feuerbach*, in onore dello studente tedesco che ne studiò approfonditamente le proprietà e, nel

1822, dimostrò uno dei più famosi teoremi di tutta la geometria del triangolo noto come *teorema di Feuerbach*¹.

La questione della scoperta del cerchio dei nove punti appare alquanto controversa. Rouché e de Camberousse nel loro famoso *Traité de Géométrie* (1891) fanno risalire la scoperta ad Eulero nel 1765. Tuttavia J. S. MacKay² sostiene che questa attribuzione è erronea ed afferma che detto cerchio è stato studiato indipendentemente da molti matematici di varie nazioni. Egli esamina in dettaglio gli sviluppi della questione e fornisce i seguenti riferimenti storici:

1804 - Nella rivista *Mathematical Repository* appare il teorema di Bevan³. La dimostrazione è data da John Butterworth in *Mathematical Repository*, vol. I (1), 143.

1807 - J. Butterworth pone un quesito relativo al cerchio dei nove punti in *Gentleman's Mathematical Companion*.

1808 - Sono date due soluzioni del quesito posto da J. Butterworth, una dello stesso Butterworth e l'altra di J. Whitley.

1821 - I nove punti sono esplicitamente menzionati in un articolo di Brianchon e Poncelet pubblicato negli *Annales de Mathématiques* di Gergonne. In quest'articolo è enunciato il teorema che stabilisce la proprietà caratteristica del cerchio dei nove punti.

1822 - Karl Wilhelm Feuerbach dimostra il famoso teorema che porta il suo nome e fornisce molte altre interessanti dimostrazioni relative al cerchio dei nove punti.

1827 - Nell'articolo *Symmetrical Properties of Plane Triangles*, pubblicato in *Philosophical Magazine* II (1827), 29-31, T. S. Davies dimostra la proprietà caratteristica del cerchio dei nove punti ed osserva che il suo centro è allineato con il baricentro, l'ortocentro e il circoncentro.

1828 - Negli *Annales de Mathématiques* di Gergonne, xix pag. 37-64, J. Steiner, nell'articolo *Developpement d'une serie de theoremes relatifs aux sections coniques*, dimostra che la proprietà del cerchio dei nove punti è un caso particolare di un teorema più generale.

1833 - J. Steiner pubblica il trattato *Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises* dove enuncia il teorema che dodici punti associati con il triangolo appartengono ad uno stesso cerchio.

¹ Il cerchio dei nove punti di un triangolo ABC è tangente all'incirchio ed a ciascuno dei tre escerchi.

² J. S. MacKay, History of the Nine Point Circle, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 11 (1892), 19-61.

³ Il cerchio circoscritto ad ABC passa per i piedi delle altezze del triangolo excentrale $I_a I_b I_c$.

1842 - Il cerchio è ufficialmente chiamato **cerchio dei nove punti** da Terquem, uno degli editori della rivista *Nouvelles Annales* (volume I, pag. 198). Terquem pubblica la seconda dimostrazione analitica del teorema che il cerchio dei nove punti tocca l'incirchio e gli excerchi.

1850 - J. Mention, in un articolo intitolato *Note sur le triangle rectiligne* pubblicato in *Nouvelles Annales*, IX (1850), 401-403, fornisce la prima dimostrazione geometrica del teorema di Feuerbach.

1854 - W. H. Levy fornisce una seconda dimostrazione geometrica del teorema di Feuerbach in *Lady's and Gentlemen's Diary*, pag. 56.

1855 - T. T. Wilkinson pubblica un lavoro sul cerchio dei nove punti in *Lady's and Gentlemen's Diary*, pag. 67-69.

1857 - John Joshua Robinson, in *Lady's and Gentlemen's Diary*, pag. 86-89, enuncia e prova un nuovo teorema sul cerchio dei nove punti.

1860 - George Salmon richiama l'attenzione sul teorema di Feuerbach in un articolo pubblicato su *Quarterly Journal of Mathematics*, volume IV, pages 152-154. Nello stesso volume del *Quarterly Journal* (pag. 245-252), John Casey dimostra il teorema di Feuerbach e ne fornisce una generalizzazione.

LA RETTA DI SIMSON-WALLACE

Sia P un punto situato nel piano del triangolo ABC e siano L, M, N le sue proiezioni sulle rette BC, CA, AB . Il triangolo LMN è detto *triangolo pedale* del punto P rispetto ad ABC . Osserviamo che quando P coincide con il circoncentro O o con l'ortocentro H otteniamo rispettivamente il triangolo mediale e il triangolo ortico. Il triangolo pedale LMN , in alcuni casi, può essere degenerare, come viene precisato nel seguente:

Teorema 2

Un punto P appartiene al circoncerchio di ABC se, e solo se, le sue proiezioni ortogonali sui lati del triangolo sono allineate.

Verifica grafica con CABRI

Tracciato ABC ed il suo circoncerchio γ , si proietta un punto P qualsiasi del piano sulle rette dei lati, in L, M, N . Si traccia, inoltre, la retta LM . Il punto N non è, in generale, su LM ma, se P viene 'preso' e trascinato su γ , N si allinea con L, M . Inoltre, se P viene mosso 'sul' circoncerchio, N si muove sulla retta LM . Per una *verifica esatta* si può ridefinire P identificandolo con un punto di γ e controllare che L appartiene alla retta MN utilizzando il comando 'allineato?'.
|

Dimostrazione

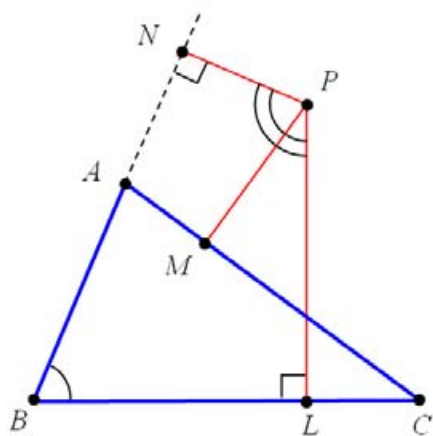


Fig. 3

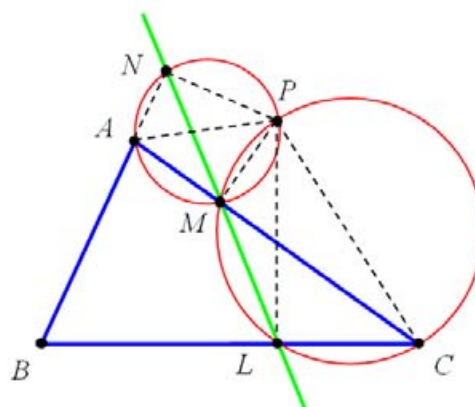


Fig. 4

Dette PL , PM , PN le perpendicolari condotte da P alle rette BC , CA , AB osserviamo che $\widehat{NPL} = 180^\circ - \widehat{B}$ (vedi Fig. 3).

LA CONDIZIONE È NECESSARIA. Se P appartiene al circoncerchio di ABC :

$$\widehat{APC} = 180^\circ - \widehat{B} \Rightarrow \widehat{NPL} = \widehat{APC}$$

Sottraendo ad ambo i membri \widehat{APL} , otteniamo:

$$\widehat{APN} = \widehat{CPL} \Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{CML}$$

e ciò implica che L , M , N sono allineati.

LA CONDIZIONE È SUFFICIENTE. Se L , M , N sono allineati

$$\widehat{AMN} = \widehat{CML} \Rightarrow \widehat{APN} = \widehat{CPL}$$

e quindi, sommando \widehat{APL} ad ambo i membri, otteniamo:

$$\widehat{APC} = \widehat{APL} + \widehat{LPC} = \widehat{APL} + \widehat{APN} = \widehat{NPL} = 180^\circ - \widehat{B}$$

ossia $ABCP$ è un quadrilatero ciclico e P appartiene al circoncerchio. \square

LMN è detta *retta di Simson-Wallace* (o *retta pedale*) di P rispetto al triangolo ABC . Questo teorema, erroneamente attribuito a Robert Simson (1687-1768), è dovuto a William Wallace, un altro matematico scozzese, che lo scoprì nel 1799. Esso

mette in luce un'inaspettata relazione tra un triangolo ed il suo circoncerchio ed ha attratto l'attenzione di molti geometri del XIX secolo, che ne hanno trovato diverse sorprendenti proprietà. Si deve a J. Steiner il seguente teorema:

Teorema 3

La retta di Simson di un punto P rispetto ABC biseca il segmento avente per estremi P e l'ortocentro H del triangolo.

Verifica grafica con CABRI

Detta D l'intersezione delle rette PH ed LM , con il comando 'equidistante?' si può verificare che D è il punto medio di PH . Inoltre si può osservare che la proprietà permane modificando la figura.

Dimostrazione

Detta K l'intersezione di PM con (O) , abbiamo che BK è parallela alla retta di Simson LMN , in quanto (Fig. 5):

$$\hat{A}NM = \hat{A}PM = \hat{A}BK$$

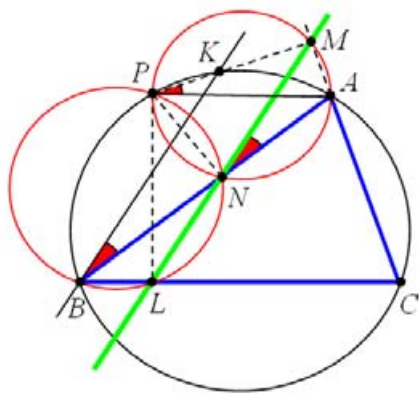


Fig. 5

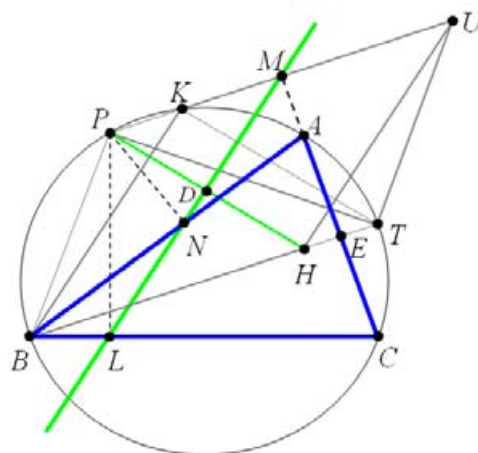


Fig. 6

Sia T l'intersezione di (O) con il prolungamento dell'altezza BE e sia U l'intersezione di PM con la parallela a BK passante per H (Fig. 6). Dal parallelogrammo $BHUK$ e dal trapezio isoscele $PBTK$ abbiamo:

$$HU = BK, \quad PT = BK \quad \Rightarrow \quad HU = PT$$

quindi $PHTU$ è un trapezio isoscele. Poiché E è il punto medio di HT (come provato nel Teorema 1) la retta EA , che è l'asse della base HT , biseca anche la base PU in M . Ne segue che la retta di Simson LMN , che passa per il punto medio M del lato PU del triangolo PUH ed è parallela ad UH , biseca il terzo lato PH . \square

PROBLEMI SUI LUOGHI

Vengono ora trattati alcuni problemi consistenti nella ricerca di luoghi geometrici; in tutti si perviene al cerchio dei nove punti di un determinato triangolo.

Dal punto di vista didattico si può osservare quanto sia prezioso l'uso del CABRI e particolarmente dei comandi 'traccia' e 'luogo' per la piena e lucida comprensione del problema, nonché per i suggerimenti che fornisce e le verifiche che consente in ordine a congetture cui il solutore è naturalmente condotto.

Problema 1

Dato un triangolo ABC sia H l'ortocentro, sia P un punto del circoncerchio e sia M il punto medio di PH . Determinare il luogo descritto da M al variare di P .

Risoluzione con CABRI

Costruita la figura, con il comando 'luogo' viene tracciato l'insieme dei punti verificanti la proprietà richiesta e si osserva agevolmente che esso coincide con il cerchio dei nove punti.

Soluzione

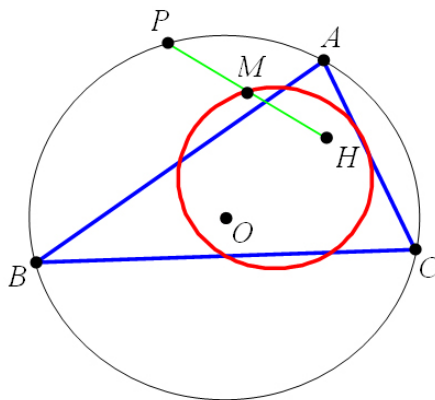


Fig. 7

Il luogo di M è il cerchio dei nove punti del triangolo ABC : basta osservare che l'omotetia ω di centro H e caratteristica $1/2$ trasforma il circoncerchio (O) nel cerchio dei nove punti ed ogni punto P di (O) nel punto medio M di PH . \square

Problema 2 (Hyacinthos message 70, 1 aprile 2000)⁴

Per i vertici di un triangolo ABC tracciamo tre rette parallele (di direzione d) ed altre tre rette ad esse perpendicolari. In tal modo si formano tre rettangoli $AEBD$, $CSBZ$, $CKAH$, che hanno per diagonali i lati AB , BC , CA del triangolo dato.

- a) Dimostrare che le altre tre diagonali ED , SZ , KH concorrono in un punto P .
- b) Trovare il luogo di P al variare di d .

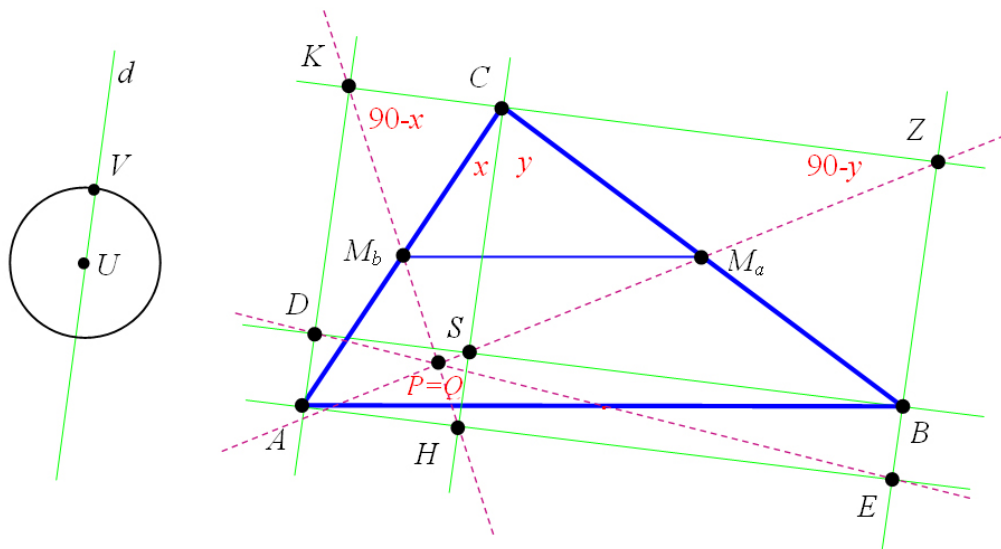


Fig. 8

Verifica e risoluzione con CABRI

Si costruisce una circonferenza di centro U e con il comando 'punto su un oggetto' si colloca su di essa un punto V (la retta UV rappresenta la direzione d). Costruita la figura come indicato nel testo si tracciano le rette SZ , KH , DE e si determina il punto P , intersezione di SZ e KH ; quindi, mediante il comando 'appartiene a ...?' si verifica che P giace su DE . Infine mediante il comando 'luogo' si traccia il luogo di P al variare di V e si constata che il luogo è il cerchio dei nove punti di ABC .

⁴ Panakis I., 1965, 2500 Problems of geometric loci with their solutions [in Greek], Athens, p. 654, #582.

Soluzione

- (a) Indicati rispettivamente con P e Q i punti di intersezione delle rette KH e DE con SZ dobbiamo dimostrare che P e Q coincidono. Per il teorema di Menelao applicato al triangolo CSZ tagliato dalla trasversale KH ed al triangolo SBZ tagliato dalla trasversale DE abbiamo:

$$\frac{ZK}{CK} \cdot \frac{CH}{SH} \cdot \frac{SP}{ZP} = 1 \quad (1)$$

$$\frac{SQ}{ZQ} \cdot \frac{ZE}{BE} \cdot \frac{BD}{SD} = 1 \quad (2)$$

Dal teorema di Talete abbiamo:

$$\frac{ZK}{CK} = \frac{BD}{SD}, \quad \frac{CH}{SH} = \frac{ZE}{BE} \quad (3)$$

Dalle (1), (2), (3) discende $\frac{SP}{ZP} = \frac{SQ}{ZQ}$ e, pertanto, $P = Q$.

- (b) Siano M_a, M_b, M_c i punti medi di BC, CA, AB . Con riferimento alle notazioni introdotte in figura 8, abbiamo:

$$M_b \hat{P} M_a = 180^\circ - \hat{PKZ} - \hat{PZK} = 180^\circ - (90^\circ - x) - (90^\circ - y) = x + y = \hat{C}$$

Il punto P vede il segmento $M_a M_b$ sotto angolo costante e quindi il luogo γ descritto da P è un cerchio. Tale cerchio passa per M_a, M_b e per M_c (essendo $M_a \hat{M}_c M_b = \hat{C}$).

Pertanto γ è il cerchio dei nove punti del triangolo ABC . \square

Problema 3

Una retta d passante per il circocentro O interseca il circoncerchio di ABC in P e Q . Sia R il punto di intersezione delle rette di Simson di P e Q rispettivamente. Trovare il luogo di R al variare di d .

Risoluzione con CABRI

Utilizzando le macro ‘circonferenza circoscritta’ e ‘retta di Simson’ si costruisce la figura, quindi con il comando ‘luogo’ si traccia il luogo di R al variare di P sul circoncerchio. Il luogo, almeno a giudicare visivamente, sembra essere il cerchio dei nove punti del triangolo ABC .

Soluzione

Dimostriamo la congettura ipotizzata con CABRI e cioè che, al variare del diametro d , il punto R descrive il cerchio dei nove punti di ABC .

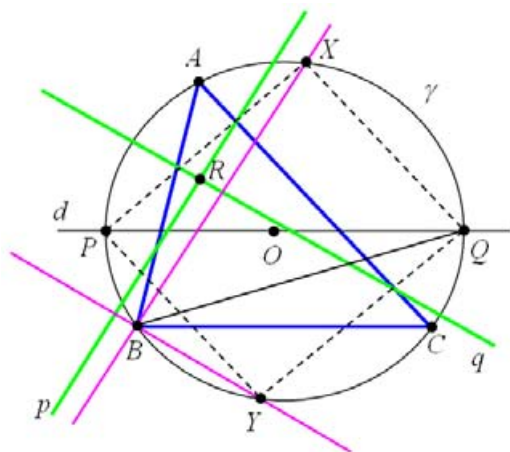


Fig. 9

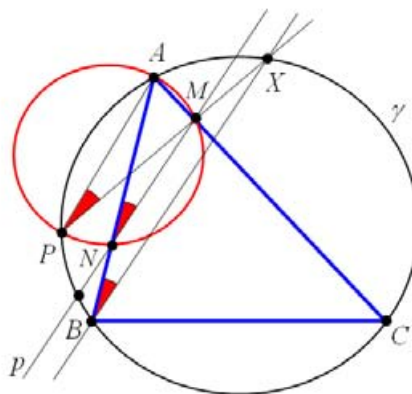


Fig. 10

Siano p, q le rette di Simson di P, Q e siano X, Y i due punti in cui le perpendicolari ad AC condotte da P, Q incontrano il circoncerchio γ di ABC (Fig. 9). La retta BX è parallela a p (Fig. 10), infatti essendo $APNM$ un quadrilatero ciclico, abbiamo:

$$\widehat{ANM} = \widehat{APM} = \widehat{APX} = \widehat{ABX}$$

In modo analogo si prova che BY è parallela a q .

$PXQY$ è un rettangolo, quindi XY è un diametro di γ e $\widehat{XBY} = 90^\circ$, ossia BX è perpendicolare a BY . Poiché p è parallela a BX e q è parallela a BY ne segue che p e q sono perpendicolari (Fig. 9).

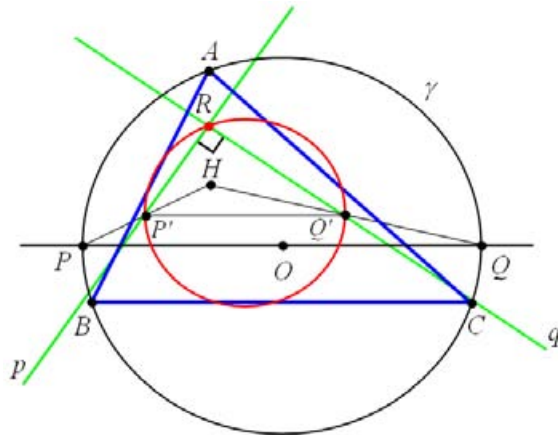


Fig. 11

Sia H l'ortocentro di ABC (Fig. 11) e sia $P'Q'$ è l'immagine di PQ nell'omotetia ω di centro H e rapporto $1/2$. Poiché ω trasforma γ nel cerchio dei nove punti (per il teorema 1), $P'Q'$ è il diametro del cerchio dei nove punti di ABC . Dato che p, q sono perpendicolari e passano rispettivamente per P', Q' (teorema 3) ne segue che il loro punto di intersezione R appartiene al cerchio dei nove punti di ABC . \square

Problema 4

Proiettiamo i vertici del triangolo ABC nei punti A', B', C' di una retta s contenuta nel piano di ABC . Tracciamo le rette $A'A'', B'B'', C'C''$ perpendicolari a BC, CA, AB rispettivamente. Dimostrare che:

- le tre rette $A'A'', B'B'', C'C''$ concorrono in un punto S , detto *ortopolo* di s rispetto al triangolo ABC .
- se s passa per il circoncentro O di ABC , S appartiene al cerchio dei nove punti di ABC ed il luogo di S al variare di s nel fascio di centro O è il cerchio dei nove punti di ABC .

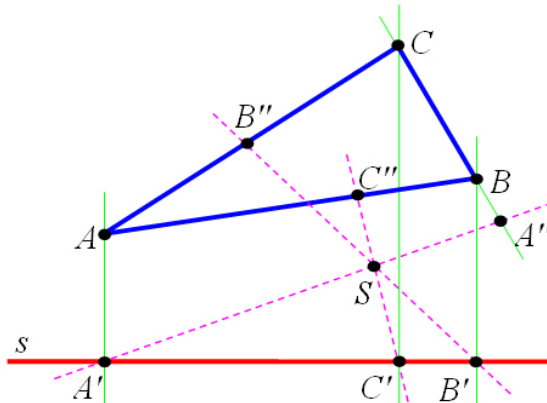


Fig. 12

Verifica grafica e risoluzione con CABRI

La verifica con Cabri mostra la veridicità di a) (Fig. 12). Utilizzando il comando 'luogo' si può trovare il luogo descritto dall'ortopolo quando la retta s varia in un fascio. Se il fascio è improprio si trova che il luogo è una retta ortogonale a s ; se il fascio è proprio il luogo è un'ellisse (Fig. 13) e, quando il suo centro P coincide con O , il luogo sembra essere il cerchio dei nove punti.

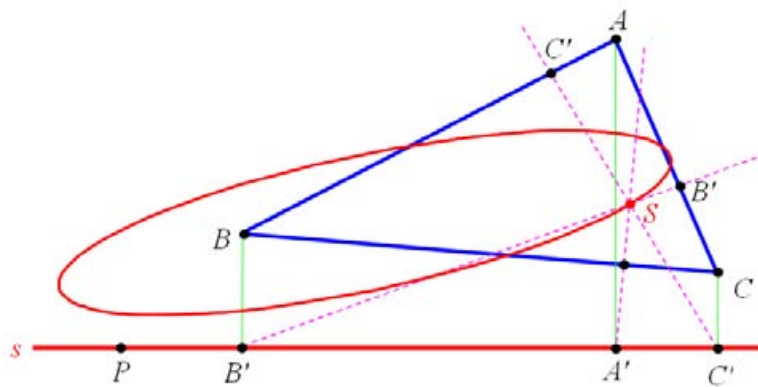


Fig. 13

Soluzione

- a) Riportiamo qui l'elegante dimostrazione dovuta al geometra francese Deaux. (Per altre dimostrazioni si veda Court (1952), Dorrie (1965), Honsberger (1995))

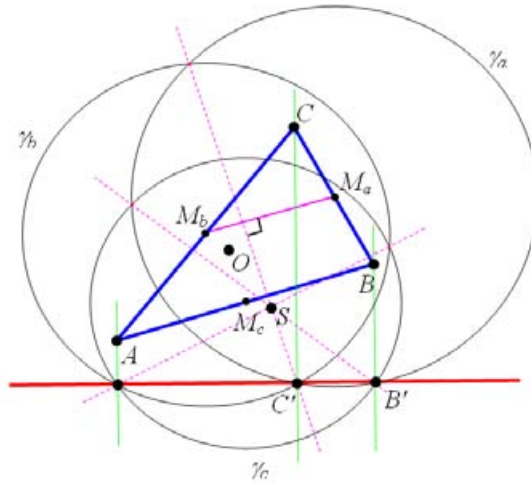


Fig. 14

Siano M_a, M_b, M_c i punti medi di BC, CA, AB , sia γ_a la circonferenza di centro M_a passante per B', C' , sia γ_b la circonferenza di centro M_b passante per A', C' , sia γ_c la circonferenza di centro M_c passante per A', B' .

La retta $C'C''$ è perpendicolare ad $M_a M_b$ (dato che $C'C''$ è perpendicolare ad AB), quindi è l'asse radicale delle circonferenze γ_a, γ_b . Analogamente si prova che $B'B''$ è asse radicale di γ_a, γ_c e $A'A''$ è asse radicale di γ_b, γ_c .

La tesi risulta allora dimostrata in quanto è noto che gli assi radicali di tre circonferenze concorrono in un punto (detto *centro radicale*).

- b) Siano A_1, B_1, C_1 i punti in cui le rette AA', BB', CC' incontrano il circonferchio. Da A_1 tracciamo la perpendicolare a BC e indichiamo con P il suo punto di intersezione con γ . La retta AA_1 è parallela alla retta di Simson di P , poiché $A_1 \hat{A} C = A_1 \hat{P} C = L \hat{M} C$ (Fig. 15).

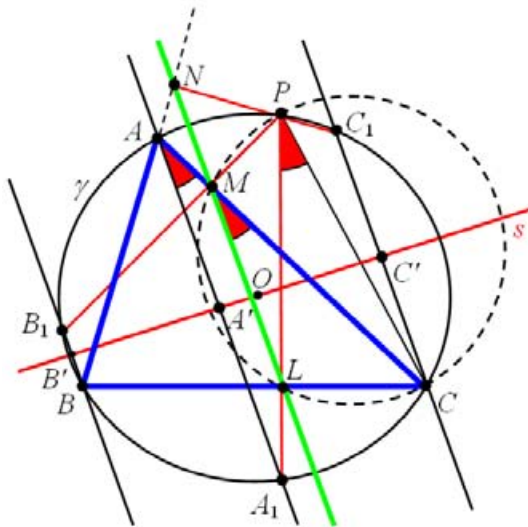


Fig. 15

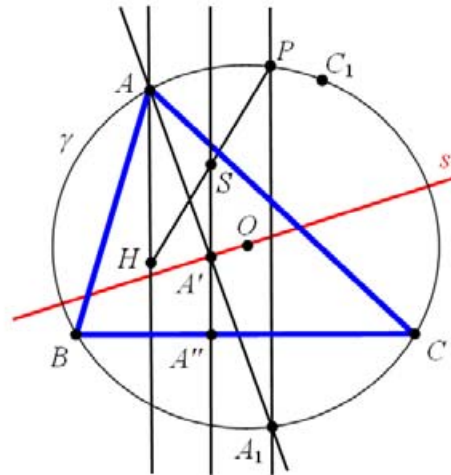


Fig. 16

Poiché AA_1, BB_1, CC_1 sono parallele, le perpendicolari condotte da A_1, B_1, C_1 rispettivamente ad BC, AC, AB intersecano γ nello stesso punto P (Fig.15) in quanto le rette di Simson relative a punti distinti hanno direzioni distinte.

Sia H l'ortocentro di ABC e sia S l'intersezione di PH con la retta $A'A''$. Poiché A' è il punto medio della della corda AA_1 , dal teorema di Talete discende che S è il punto medio di PH (Fig. 16). In modo analogo si prova che anche le rette $B'B''$ e $C'C''$ passano per S , ossia l'ortopolo della retta s è il punto medio di PH .

Pertanto il luogo di S è il cerchio dei nove punti (vedere problema 1). \square

Problema 5 (Teorema di Poncelet-Brianchon)

Sia dato un triangolo ABC inscritto in una conica γ .

- a) Dimostrare che γ è un'iperbole equilatera se e solo se passa per l'ortocentro H .
- b) Trovare il luogo dei centri delle iperboli equilateri circoscritte ad ABC .

Verifica grafica e risoluzione con CABRI

Un'iperbole equilatera circoscritta ad ABC passa per l'ortocentro H : con la macro 'Iperbole1P2A' si disegna un'iperbole equilatera γ avente per asintoti due rette (perpendicolari) assegnate e passante per un punto dato. Con il comando 'punto su un oggetto' si prendono tre punti $A, B, C \in \gamma$, si determina l'ortocentro H del triangolo ABC e, infine, con il comando 'appartiene a ...?' si verifica che H appartiene a γ .

Una conica circoscritta ad ABC e passante per l'ortocentro H è un'iperbole equilatera: si traccia un triangolo ABC e se ne determina l'ortocentro H ; con il comando 'conica' si tracci quella passante per A, B, C, H e per un ulteriore punto P scelto a piacere; si vede subito che essa è un'iperbole. Per verificare che è equilatera si utilizza la macro 'Asintoti Iperbole' per tracciarne gli asintoti u, v e con il comando 'perpendicolare?' si constata che u, v sono perpendicolari.

Per tracciare il luogo dei centri delle iperboli circoscritte ad ABC si costruisce una circonferenza e si prende su di essa un punto P ; si traccia poi la conica (iperbole) passante per A, B, C, H, P e se ne determina il centro K (intersezione degli asintoti u, v); infine con il comando 'luogo' si traccia il luogo di K al variare di P . Si riconosce agevolmente che il luogo trovato è il cerchio dei nove punti di ABC .

Una soluzione sintetica del problema è data in Brianchon (1821). Diamo altre due soluzioni:

Soluzione 1

È noto che (vedi Rizzi (1970)):

- 1) Il luogo dei centri delle coniche di un fascio è una conica
- 2) Se le coniche del fascio sono iperboli equilatera il luogo dei centri è un cerchio.
- 3) Se il fascio contiene due iperboli equilatera, tutte le coniche del fascio sono iperboli equilatera.

Ciò premesso, sia ABC un triangolo del quale H è l'ortocentro ed H_a, H_b, H_c sono i piedi delle altezze (Fig. 17). Consideriamo il fascio di coniche di punti base A, B, C, H . Le sue coniche degeneri sono costituite dalle coppie di rette $(AH_a, CB), (BH_b, AC), (CH_c, AB)$; le rette di ciascuna coppia sono tra loro perpendicolari, quindi sono iperboli equilatera degeneri. Ne consegue:

- che tutte le coniche del fascio sono iperboli equilatera (per 3)
- che il luogo dei centri è un cerchio (per 2)

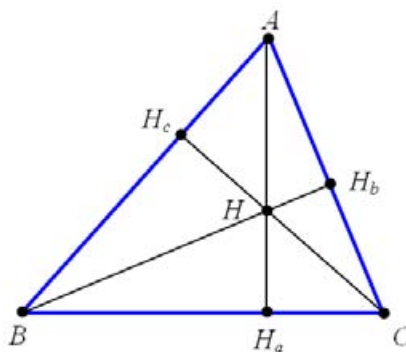


Fig. 17

Se si tiene poi conto che questo cerchio passa per H_a, H_b, H_c si vede subito che esso è il cerchio dei nove punti del triangolo ABC . \square

Soluzione 2

a) Supponiamo che γ sia un'iperbole equilatera. Scelto un sistema di riferimento cartesiano Oxy avente come assi gli asintoti dell'iperbole, sia $xy = k$ l'equazione di γ e siano

$$A\left(a, \frac{k}{a}\right), B\left(b, \frac{k}{b}\right), C\left(c, \frac{k}{c}\right)$$

le coordinate dei vertici del triangolo.

Con semplici calcoli si trova che l'ortocentro di ABC ha coordinate:

$$H\left(-\frac{k^2}{abc}, -\frac{abc}{k}\right)$$

e da ciò discende che H appartiene all'iperbole.

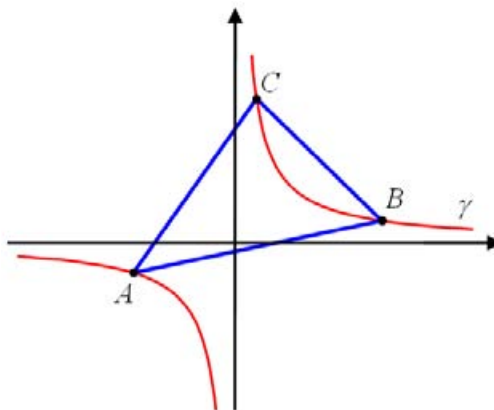


Fig. 18

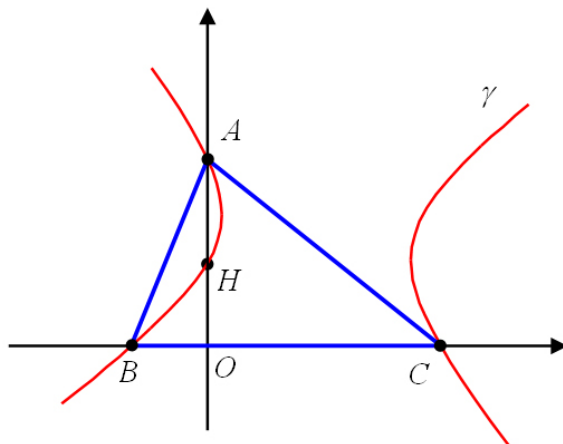


Fig. 19

Supponiamo che γ passi per l'ortocentro H (Fig. 19). Scelto un riferimento cartesiano Oxy avente come asse delle x la retta BC e come asse delle y la retta AH , le coordinate dei vertici e dell'ortocentro sono:

$$A(0, h), B(-u, 0), C(v, 0), H\left(0, \frac{uv}{h}\right).$$

La conica γ ha equazione:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Imponendo il passaggio per i punti A, B, C, H si trova che:

$$a + c = 0.$$

Pertanto γ è un'iperbole equilatera.

- b) Siano K, u, v il centro e gli asintoti dell'iperbole, siano M_a, M_b, M_c i punti medi di BC, CA, AB , siano A_1, A_2 le intersezioni di BC con u, v e, infine, siano B_1, B_2 le intersezioni di AC con u, v (Fig.20). Come si può facilmente verificare per via analitica risulta:

$$BA_2 = CA_1 \quad , \quad CB_2 = AB_1$$

e quindi M_a, M_b sono i punti medi di A_1A_2, B_1B_2 .

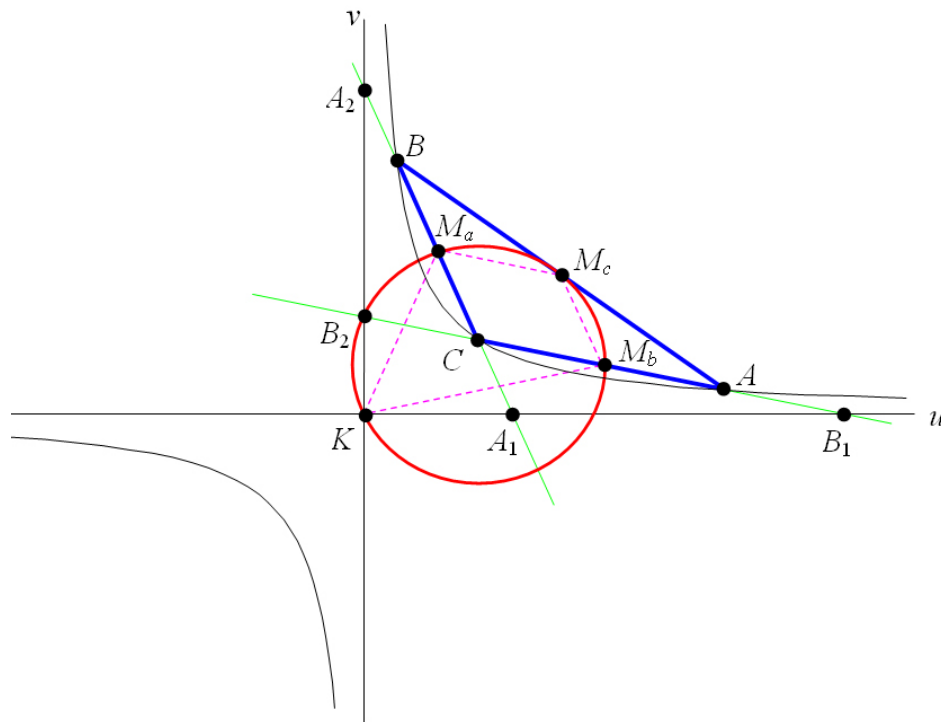


Fig. 20

Dai triangoli rettangoli A_1A_2K , B_1B_2K abbiamo:

$$M_a K = M_a A_1, \quad M_b K = M_b B_1$$

Pertanto:

$$M_a \hat{K}A_1 = M_a \hat{A}_1K, \quad M_b \hat{K}B_1 = M_b \hat{B}_1K$$

e sottraendo membro a membro le due uguaglianze otteniamo:

$$M_a \hat{K}M_b = A_1 \hat{C}B_1 = 180^\circ - M_a \hat{C}M_b = 180^\circ - M_a \hat{M}_c M_b$$

Ne segue che $M_a K M_b M_c$ è ciclico e quindi K appartiene al cerchio dei nove punti di ABC . □

Problema 6 (Hyacinthos message 7998, 24 settembre 2003)

Sia ABC un triangolo, D un punto, e D_a, D_b, D_c le riflessioni di D rispetto alle altezze AH_a, BH_b, CH_c rispettivamente (Fig. 21).

- a) Provare che le rette $H_a D_a, H_b D_b, H_c D_c$ concorrono in un punto R .
- b) Determinare il luogo dei punti D tali che le rette $H_a D_a, H_b D_b, H_c D_c$ siano parallele.

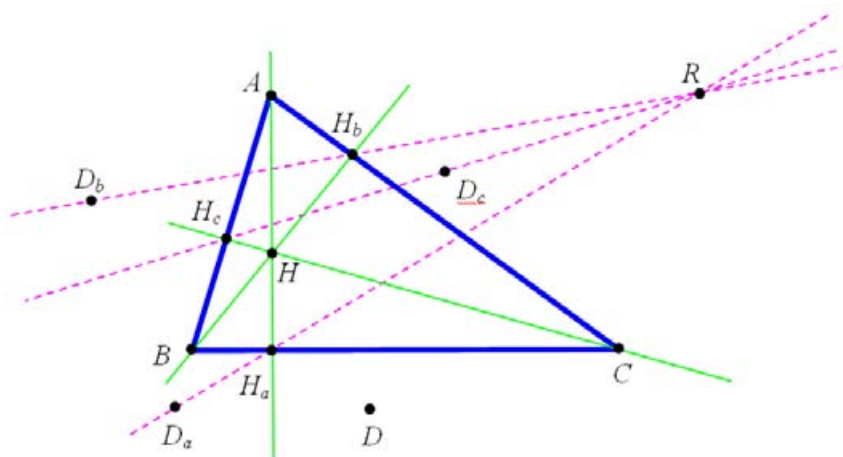


Fig. 21

Il luogo richiesto è il cerchio dei nove punti di ABC . Se ne lascia al lettore sia la dimostrazione razionale che la ricerca mediante CABRI.

Bibliografia

- Alasia C., 1917, Dimostrazione analitica di alcune proposizioni sulla circonferenza di Eulero, *Il Periodico di matematiche*, Mathesis, pp. 12-20.
- Bogomolny A., <http://www.cut-the-not.org/Curriculum/Geometry/Orthopole>.
- Brianchon C. J., Poncelet J. V., 1821, Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère, moyen de quatre conditions données, *Annales de Mathématiques*, Tome XI.
- Collet M., Griso G., 1987, *Le cercle d'Euler*, Librairie Vuibert, Paris.
- Coxeter H. S., Greitzer S. L., 1967, *Geometry revisited*, MAA, Washington.
- Court N. A., 1952, *College geometry*, Barnes & Noble, New York.
- Cuppens R., *Faire de la géométrie supérieure en jouant avec Cabri-Géomètre II*, Brochure APMEP n. 124.
- D'Ignazio I., Suppa E., 2001, *Il problema geometrico: dal compasso al Cabri*, Interlinea, Teramo.
- Dorrie H., 1965, *100 Great problems of elementary mathematics*, Dover, New York.
- F. G. M., 1920, reprint 1991, *Exercices de géométrie*, Gabay, Paris.
- Hatzipolakis A., 2000, *Hyacinthos message*, 70.
- Hatzipolakis A., 2003, *Hyacinthos message*, 7998.
- Honsberger R., 1995, *Episodes in nineteenth and twentieth century euclidean geometry*, MAA, Washington.
- Modenov P. S., 1981, *Problems in geometry*, MIR Publishers Moscow.
- Papelier G., 1927, reprint 1996, *Exercices de géométrie moderne*, Gabay, Paris.
- Pedoe D., 1995, *Circles: a mathematical view*, MAA, Washington.
- Rizzi B., 1970, La conica luogo dei centri delle coniche di un fascio, *Archimede*, n. 5, pp. 244-250.